

Posten 5

$E = mc^2$

Sozialform	Einzel- oder Partnerarbeit
Bearbeitungszeit	25 Minuten
Voraussetzung	Posten 1 „Einsteins Postulate“

5.1 Einleitung

$E = mc^2$ gehört mit zu den bekanntesten Gleichungen. Die Werkstatt Spezielle Relativitätstheorie wäre ohne eine Herleitung dieser berühmten Gleichung unvollständig; dieser Werkstattposten zeigt eine leicht verständliche Herleitung der Energie-Masse-Relation, die auf diese Art 1946 von Einstein selbst veröffentlicht wurde. Es ist Ziel dieses Postens, dass Sie die Idee dieser berühmten Gleichung verstehen und die Herleitung nachvollziehen können.

5.2 Arbeitsauftrag

- 1) Lesen Sie aufmerksam den Text durch und vollziehen Sie die Herleitung nach.
- 2) Bearbeiten Sie die gestellten Aufgaben.

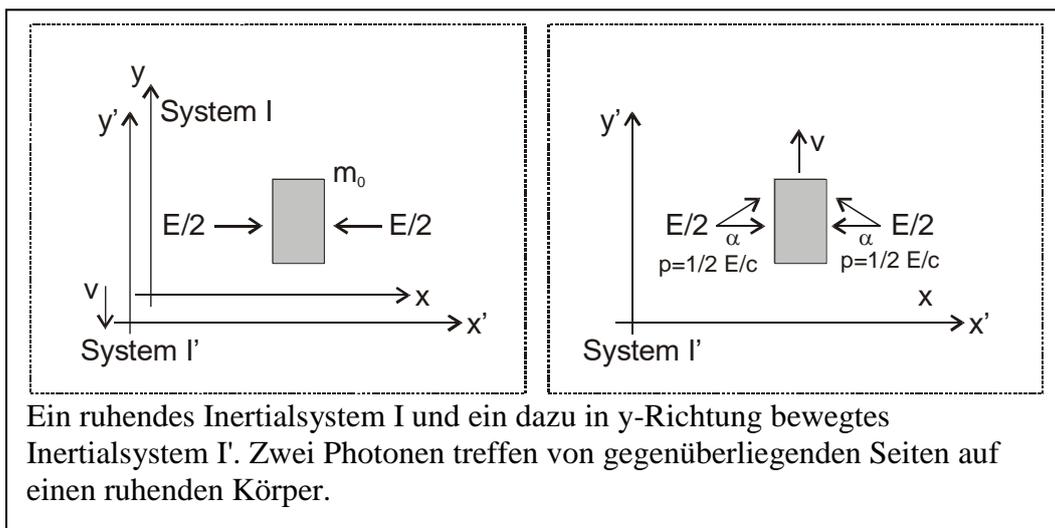
5.3 Herleitung der Gleichung $E = mc^2$

Die Gleichung $E = mc^2$ wird auch Masse-Energie-Äquivalenz-Gesetz genannt. Die nachfolgende Herleitung hat Einstein 1946 in seinem Buch *Aus meinen späten Jahren* publiziert.

Die Herleitung geht im Wesentlichen nur vom Gesetz der Erhaltung des Impulses aus, wobei sich der Impuls auf eine Strahlung bezieht, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet. Eine solche Strahlung kann in Form eines Photons verstanden werden.

Bekanntermassen beträgt der Impuls eines Photons: $p = \frac{E}{c}$ (siehe auch Compton-Effekt oder Clark Maxwell 1873).

Betrachten Sie ein Inertialsystem I, in dem sich ein ruhender Körper der Masse m_0 befindet. Dieser Körper absorbiert Strahlungsenergie, d. h. wenn immer ein Photon auf den Körper trifft, so wird dessen Energie vom Körper vollständig absorbiert. Es treffen nun zwei Photonen auf die jeweils gegenüberliegenden Seiten des Körpers. Die Energie E der beiden Photonen (d. h. ein Photon soll die Energie $E/2$ haben) wird dem Körper je zur Hälfte in Richtung der positiven und der negativen x-Achse zugeführt.



Der Körper bleibt dabei in Ruhe, da er von jeder Seite den gleichen Impuls erfährt. Der Impuls von jeder Seite beträgt somit $\frac{1}{2} \frac{E}{c}$. Im Folgenden wird nun gezeigt, dass sich aufgrund der Energiezufuhr die Masse von m_0 auf m vergrößert.

Dieser Prozess wird nun von einem bewegten Inertialsystem I' aus betrachtet, das sich mit der Geschwindigkeit v in y-Richtung gegenüber dem ruhenden Inertialsystem I bewegt. Aus Sicht des bewegten Systems I' bewegt sich die Masse m_0 in der positiven y-Richtung mit der Geschwindigkeit v . In Bezug auf den Körper erscheinen die Einstrahlungsrichtungen der beiden Photonen unter einem Winkel α zur x-Achse. Für diesen Winkel gilt $\sin \alpha = \frac{v}{c}$,

Vor der Absorption ist m_0 die Masse des Körpers mit dem Impuls $p_0 = m_0 v$. Von dem Impuls der Strahlung wird nur die y-Komponente $p_1 = p \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \frac{E}{c} \sin \alpha$ wirksam, die sich ausdrücken lässt durch: $p_1 = \frac{1}{2} \frac{E \cdot v}{c}$. Der aufgenommene Gesamtimpuls von beiden Photonen beträgt damit: $p_2 = 2 \cdot p_1 = \frac{E \cdot v}{c^2}$.

Vor der Absorption betrug der Impuls des Körpers $p_0 = m_0 v$ und der Impuls der zwei Photonen $p_2 = \frac{E \cdot v}{c^2}$, also betrug der Gesamtimpuls des Systems $p = p_0 + p_2 = m_0 v + \frac{E \cdot v}{c^2}$. Nach der Absorption hat sich die (träge) Masse vergrößert, so dass der Impuls dann $p = m v$ beträgt. Es gilt die Impulserhaltung und es ergibt sich folgende Gleichung: $m_0 v + \frac{E \cdot v}{c^2} = m v \Rightarrow m - m_0 = \frac{E}{c^2}$.

Damit ist die Äquivalenzbeziehung für Masse und Energie auf einem einfachen Weg hergeleitet. Es sei besonders darauf hingewiesen, dass die Beziehung $p = \frac{E}{c}$ bereits vor der Quanten- und Relativitätstheorie bekannt war, da sie aus der Maxwellschen Theorie des Elektromagnetismus gefolgert wurde.

Die Masse-Energie-Äquivalenz sagt aus, dass Energie- und Massenänderung untrennbar zusammenhängen: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$. Werden bei einer Integration dieser Gleichung die Konstanten Null gesetzt, so ergibt sich die bekannte Beziehung

Einsteinsche Äquivalenzbeziehung für Masse und Energie:

$$E = m \cdot c^2$$

Diese berühmte Einsteinsche Formel eröffnete z. B. die Möglichkeit, die Energie zu bestimmen, mit der die Bausteine des Atomkerns zusammenhalten. Mit der Bestimmung dieser Bindungsenergien konnten wesentliche Fortschritte in der Kernphysik erzielt werden.

Aber: die Masse-Energie-Relation $E = m \cdot c^2$ darf nicht verstanden werden als Umwandlung von Masse in Energie und umgekehrt. Keine Masse kann ohne Energie existieren. Die Relation ist demnach allein im Sinne einer gegenseitigen Zuordnung (Äquivalenz) von Masse und Energie zu verstehen!

Aufgabe 1: Geben Sie den Energieinhalt von 1g Masse in Joule an.

Aufgabe 2: Bei der Knallgasreaktion $2H + O \rightarrow H_2O$ wird die Reaktionsenergie von 571,6 kJ pro Mol Wasser vollständig abgeführt. Um wie viele Kilogramm reduziert sich die Masse eines Wassermoleküls gegenüber der Gesamtmasse der beteiligten H- und O-Atome?

Aufgabe 3: Was ist an der Äquivalenz von Energie und Masse so interessant?