Posten 4

Sind Längen immer gleich lang?

Sozialform	Einzel- oder Partnerarbeit
Bearbeitungszeit	40 Minuten
Voraussetzung	Posten 1 „Einsteins Postulate“
	Posten 3 „Ist Zeit relativ?“

4.1 Einleitung

In diesem Werkstattposten werden Sie die Längenkontraktion von sich schnell bewegenden Objekten kennen lernen, die in der speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt.

Im Posten 3 „Ist Zeit relativ?“ haben Sie gelernt, dass eine bewegte Uhr langsamer läuft als in ihrem Ruhesystem. Das heißt also, dass die Zeit (bzw. ein Zeit-Intervall) nicht eine absolute Grösse ist, sondern vom Inertialsystem abhängt, in dem es gemessen wird.

Wie verhalten sich nun Länge, Breite und Höhe eines Gegenstandes? Werden diese Grössen auch verändert, wenn sich der Gegenstand sehr schnell bewegt? Sind die Abmessungen im bewegten Bezugssystem und im ruhenden Bezugssystem gleich? Auf diese Fragen werden Sie in diesem Posten die Antworten finden.

Ziel des Postens ist es, dass sie anhand der Relativgeschwindigkeit eines Objektes seine Längenkontraktion berechnen können (oder auch umgekehrt: aus gegebener Längenkontraktion die Relativgeschwindigkeit berechnen). Zudem sollten Sie eine Ahnung davon haben, wie man die Längenkontraktion herleitet und auch experimentell nachweisen kann.

4.2 Arbeitsauftrag

1) Lesen Sie aufmerksam den Text zur Längenkontraktion. Ihnen wird dort erklärt, dass sich sehr schnell bewegende Objekte in ihrer Bewegungsrichtung kontrahiert erscheinen.

2) Lösen Sie die aufgeführten Aufgaben.

4.3 Stauchung eines Maßstabs

Stellen wir uns eine Situation wie in der Abb. 1. vor: Ein Maßstab ruhe in einem Inertialsystem, und eine Uhr bewege sich entlang des Maßstabs von links nach rechts mit der Geschwindigkeit *v*.

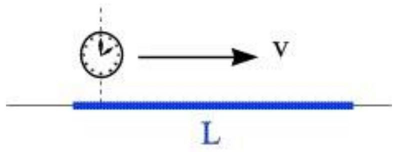

Abb. 1: Ruhesystem des Massstabs

Die Frage ist nun: *Wie lange braucht die Uhr, um sich am Maßstab vorbei zu bewegen?*

Sie kommt von links, erreicht das linke Ende des Massstabs (dieses Ereignis nennen wir A), bewegt sich dem Massstab entlang, erreicht sein rechtes Ende (dieses Ereignis nennen wir B), und entfernt sich nach rechts. Wieviel Zeit vergeht zwischen den Ereignissen A und B?

Der Massstab beobachtet den Vorbeigang der bewegten Uhr. Wie wir im Posten „Ist Zeit relativ?“ gesehen haben, läuft also im Ruhesystem des Maßstabs (der die Uhr beobachtet) die beobachtete Uhr langsamer als im Ruhesystem der Uhr selbst. Das heisst also:

- Die Uhr selbst misst in ihrem Ruhesystem zwischen den Ereignissen A und B ein bestimmtes Zeitintervall.
- Im Ruhesystem des Massstabs vergeht zwischen den beiden Ereignissen A und B ein anderes, längeres Zeitintervall.

Also ist das Zeitintervall, das im *Ruhesystem der Uhr* zwischen den Ereignissen A und B gemessen wird, **kürzer** als die Zeit, die im *Ruhesystem des Maßstabs* verstreicht. Diese Tatsache wird für die Herleitung der Längenkontraktion von grosser Bedeutung sein!

Aus Sicht des Massstabs schwirrt die Uhr mit der Geschwindigkeit *v* über seine Länge *L*. Also ist das gemessene Zeitintervall im Ruhesystem des Massstabs die benötigte Zeit, um die Strecke *L* mit der Geschwindigkeit *v* zurückzulegen (also *L/v*). Daraus schliessen wir also gezwungenermaßen, dass die Zeitspanne, die für *die Uhr selbst* vergeht, ***kleiner als L/v*** ist.

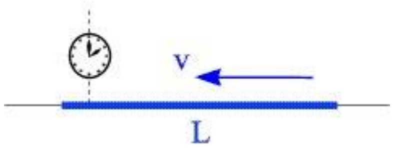

Abb. 2: Ruhesystem der Uhr (Galilei)

Drehen wir nun den Spieß um, und versetzen uns in das Ruhesystem der Uhr. In ihrem Ruhesystem bewegt sich der Massstab nach links, mit der Geschwindigkeit *v*. Betrachten wir zunächst den Fall, wenn wir die galileische, klassische Physik anwenden würden (Abb. 2). Die Länge des Stabs ist dann immer noch *L*, denn in der galileischen Physik sind die Längen immer gleich, unabhängig vom Inertialsystem, in dem sie gemessen werden. Das führt aber zu einem Problem: Der Massstab mit der Länge *L* flitzt mit der Geschwindigkeit *v* an der Uhr vorbei. Im *Ruhesystem der Uhr* dauert dieser Prozess also *L/v*. Wir haben aber soeben festgestellt, dass aufgrund der Zeitdilatation dieser Prozess im Ruhesystem der Uhr *weniger als L/v* dauert!

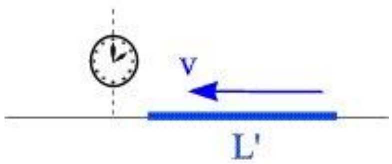

Abb. 3: Ruhesystem der Uhr (Einstein)

Die Uhr hat also sozusagen weniger Zeit zur Verfügung, um den Stab an ihr vorbeiflitzen zu lassen. Daraus folgt gezwungenermaßen, dass die Länge des Massstabs (im Ruhesystem der Uhr gemessen) *kleiner als L* ist (siehe Abb. 3)! Nur so schafft es der Massstab, sich in der kürzeren, zur

Verfügung stehenden Zeit an der Uhr vorbei zu bewegen. Er schrumpfte um den selben Faktor, um den die Uhr im Ruhesystem des Maßstabs langsamer geht.

Zusammengefasst:
Weil sich die Uhr bewegt, läuft sie im *Ruhesystem des Maßstabs* (der die Uhr beobachtet) langsamer. Also ist die Zeitspanne zwischen den Ereignissen A und B im *Ruhesystem der Uhr* kürzer. Aus Sicht der Uhr hat der Massstab deshalb weniger Zeit, um an ihr vorbei zu gehen. Da er aber tatsächlich in dieser Zeit an ihr vorbeigegangen ist, heißt das also, dass seine Länge (aus Sicht der Uhr) gestaucht ist!

Aus der Grundannahme der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erhält man als Konsequenz also nicht nur den Effekt der Zeitdilatation, sondern auch folgenden Effekt:

„Bewegte Massstäbe sind in Bewegungsrichtung gestaucht.“

Dieser Effekt heißt *Lorentzkontraktion* oder *Längenkontraktion*. Er existiert nur in Bewegungsrichtung, also **nicht quer dazu**! Dies soll folgende Überlegung zeigen: Der Relativitätsexpress fährt mit nahezu Lichtgeschwindigkeit auf Gleisen dahin. Bei Betrachtung der Situation aus dem Ruhesystem der Gleise ergibt sich folgendes Bild (Abb. 4b): Gäbe es eine Querkontraktion, so wäre die Achsenlänge der Wagons verkürzt. Hingegen vom Ruhesystem des Zuges aus (Abb. 4c), wäre der Gleisabstand gestaucht und die Räder würden auf der anderen Seite der Gleise dahinrollen. Aufgrund der Abnutzungserscheinungen an den Rädern kann man im nächsten Bahnhof klar entscheiden, ob die Räder innerhalb oder außerhalb der Gleise gerollt sind und dadurch ein absolutes Ruhesystem bestimmen. Dies jedoch widerspricht dem Relativitätsprinzip!

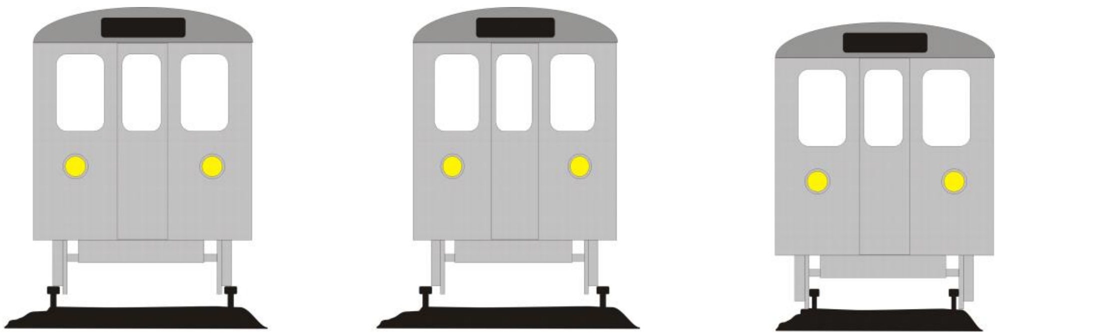

Abb. 4: a) Klassische Eisenbahn   b) Querkontraktion aus dem Ruhesystem der Gleise aus betrachtet   c) Querkontraktion aus dem Ruhesystem des Zuges aus betrachtet

4.4 Formale Berechnung

Die Frage ist nun konkret, um wieviel ein Körper in Bewegungsrichtung gestaucht erscheint, abhängig von seiner beobachteten Geschwindigkeit. Der Weg zur Antwort ist nicht mehr weit:

Analog zum Posten mit der Zeitdilatation, definieren wir nun hier die Länge des Massstabs in seinem eigenen Ruhesystem als $\boldsymbol{l_0}$, und im System der Uhr (also in einem System, in dem sich der Massstab bewegt) als $\boldsymbol{l}$.
Wie wir gesehen haben, sieht das Zeitintervall zwischen den Ereignissen A und B in den beiden Systemen verschieden aus:

Im Ruhesystem des Maßstabs dauert der Vorgang $\Delta t = l_0 / v$.

Aufgrund der Zeitdilatation misst die Uhr ein kürzeres Intervall $\Delta t_0 = \Delta t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{v} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Dies ist also die Zeit, die im *Ruhesystem der Uhr* zwischen den Ereignissen A und B verstreicht. Multipliziert man sie mit der Geschwindigkeit des Massstabes, bekommt man seine Länge:

$$l = v\Delta t_0 = v \cdot \left(\frac{l_0}{v} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) = l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma} \quad \text{(mit Relativitätsfaktor } \gamma\text{)}$$

Wir erhalten also denselben Faktor, der schon bei der Zeitdilatation aufgetaucht ist. Das Objekt wird also (aus Sicht eines zu ihm bewegten Beobachters) um denselben Faktor gestaucht, wie seine Zeit gedehnt wird.
Für $v^2 > 0$ ist dieser Faktor kleiner als 1. Bewegte Objekte sind also in Bewegungsrichtung immer gestaucht. Es ist unmöglich, dass es sich wegen der Bewegung ausdehnt.

Längenkontraktion: $l = l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma}$

$\boldsymbol{l_0}$ ist dabei die Länge des Objektes in seinem Ruhesystem. Das Objekt bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bezüglich des Beobachters, der in Bewegungsrichtung die Länge $\boldsymbol{l}$ beobachtet.

Für einen Beobachter ist die Länge eines relativ zu ihm bewegten Körpers in der Bewegungsrichtung kleiner als für einen Beobachter, in dessen System der Körper ruht.

„Bewegte Massstäbe sind gestaucht.“

Die Kontraktion geschieht nur in Bewegungsrichtung, und nicht senkrecht dazu.

Aufgabe 1:
Ein 2,0 m langer Speer fliegt mit einer Geschwindigkeit von 0,80*c*. Wie lang ist der Speer im Bezugssystem des Werfers und in seinem eigenen Bezugssystem?

Aufgabe 2:
Wie schnell muss der Speer geworfen werden, damit seine Länge aus Sicht der Zuschauer um a) 1%, b) 10% und c) 50% abnimmt? Geben Sie die Geschwindigkeit in Einheiten von c an. Vergleichen Sie die Geschwindigkeiten mit der Geschwindigkeit von Elektronen in einer TV Röhre ($8.0 \cdot 10^7$ m/s).

4.5 Beispiel zur Längenkontraktion: Myonenzerfall

Am folgenden Beispiel soll deutlich gemacht werden, dass die Phänomene, die die spezielle Relativitätstheorie voraussagt, tatsächlich auch in der Natur beobachtet werden können.

Durch kosmische Höhenstrahlung werden bei Stoßprozessen zwischen Atomkernen in der Erdatmosphäre in 12 km bis 15 km Höhe Myonen erzeugt. Myonen sind Elektronen sehr ähnlich, jedoch sind sie sehr instabile Elementarteilchen, die bereits nach wenigen Millionstel Sekunden zerfallen. Messungen an ruhenden Myonen zeigten eine mittlere Lebensdauer von $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s.

Ein Teil der in der Erdatmosphäre erzeugten Myonen bewegt sich fast mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung Erdmittelpunkt. Ihre Geschwindigkeit beträgt $v = 0{,}99942 \cdot c$.

In der klassischen Physik lässt sich daraus folgende mittlere Weglänge errechnen: Innerhalb ihrer mittleren Lebensdauer von $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s und ihrer Geschwindigkeit von $v = 0.99942 \cdot c$ können die Myonen einen mittleren Weg von $s = 0{,}99942 \cdot 3 \cdot 10^{8}$ m/s $\cdot\, 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s = 660 m zurücklegen. Demnach sollten keine Myonen auf die Erdoberfläche gelangen. Doch das Gegenteil ist der Fall! Fast alle erreichen die Erdoberfläche.

Wird dagegen der Weg der Myonen relativistisch berechnet, so ergibt sich ein anderes Bild: Ein Beobachter, der mit den Myonen gemeinsam Richtung Erdmittelpunkt rast, misst in der Eigenzeit des Systems ebenfalls eine mittlere Lebensdauer der Myonen von 2,2·10-6s. Er stellt ferner fest, dass sich die Erdoberfläche mit fast Lichtgeschwindigkeit nähert. Die Distanz zwischen Erdatmosphäre und Erdoberfläche ist im bewegten System kleiner, eben kontrahiert.

Im Bezugssystem der Myonen hingegen beträgt diese Distanz $l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \cdot \frac{1}{30}$, wobei eine Geschwindigkeit von $v = 0.99942 \cdot c$ eingesetzt wurde. Angenommen, die Myonen werden in 12 km Höhe erzeugt, so beträgt die Strecke, die sie im Mittel vor dem Zerfall durchlaufen, für die Myonen nur 1/30 der Strecke im Ruhesystem, also l = 12 km · 1/30 = 400 m. Bei der Geschwindigkeit von $v = 0.99942 \cdot c$ kann aber innerhalb von $2{,}2 \cdot 10^{-6}$s eine Distanz von etwa 660 m zurückgelegt werden. Die Myonen erreichen somit fast alle die Erdoberfläche.

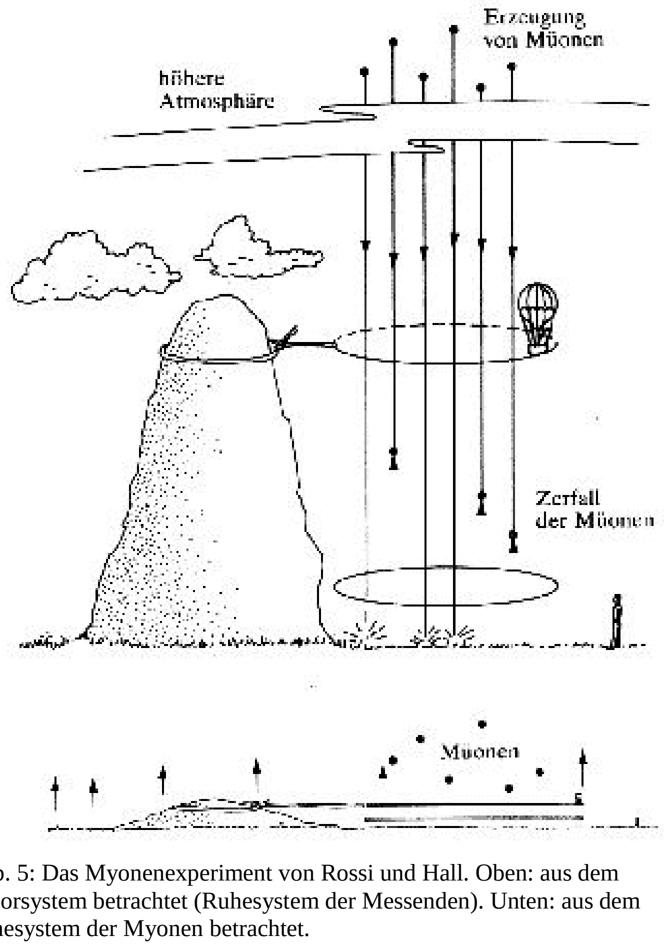

Abb. 5: Das Myonenexperiment von Rossi und Hall. Oben: aus dem Laborsystem betrachtet (Ruhesystem der Messenden). Unten: aus dem Ruhesystem der Myonen betrachtet.

Aufgabe 3:

a) Formulieren Sie mit ihren eigenen Worten, wie das Erreichen der Erdoberfläche der Myonen mithilfe der Längenkontraktion erklärt werden kann.

b) Beschreiben Sie den gleichen Effekt mithilfe der Zeitdilatation (siehe vorheriges Kapitel) indem Sie die Vorkommnisse vom Bezugssystem der Erde aus beschreiben.

Im Jahr 1941 wurde von B. Rossi und D.B. Hall das sogenannte Myonen-Experiment auf dem Mount Washington in New Hamphire, USA, durchgeführt. Dort wurde der experimentelle Nachweis für die Längenkontraktion erbracht.

Auf dem Gipfel des Berges in 1910 m Höhe wurden Myonen mit einer bestimmten Geschwindigkeit mit einem Detektor gezählt und mit der Anzahl der Myonen verglichen, die mit einem weiteren Detektor am Fuss des Berges in 3 m über dem Meeresspiegel gemessen wurden. Auf dem Berg wurden eine Zählrate von 563 Myonen/Stunde und am Fuss des Berges 408 Myonen/Stunde ermittelt. Innerhalb der gleichen Zeit bleiben von 563 im ruhenden Laborsystem erzeugten Myonen aber nur 31 Myonen übrig. Damit war der Beweis für eine Zeitdilatation bzw. Längenkontraktion erbracht. (Näheres kann in der Originalquelle nachgelesen werden.)

Aufgabe 4:

Unter der Annahme, dass Autos in der Zukunft viel schneller als heute fahren können, wäre es dann möglich ein 5 m langes Auto in eine 4 m lange Garage zu parken?

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Auto in die Garage hineinfahren müsste, um ganz darin zu verschwinden.

b) Könnte diese Vision funktionieren?

Aufgabe 5:

Eine Tunneleinfahrt ist 2,0 m hoch. Ein Physiker möchte gerne sein 2,2 m hohes Auto durch diesen Tunnel fahren. Wie schnell müsste der Physiker fahren, damit er durch den Tunnel passt? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 6:

Der Radius unserer Galaxie beträgt etwa $3 \cdot 10^{20} m$.

a) Wie schnell müsste ein Raumschiff fliegen, wenn es die ganze Galaxie innerhalb von 300 Jahren (gemessen vom Raumschiff aus) durchqueren soll?

b) Wieviel Zeit ist währenddessen auf der Erde vergangen?