Aufgaben zu Energie und Impuls
LÖSUNG

1 Potentielle Energie

a) $E_{pot} = m \cdot g \cdot h = 75\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 25\,\mathrm{m} = 18393{,}75\,\mathrm{J}$

b) Formel umstellen: $h = \frac{E_{pot}}{m \cdot g} = \frac{10000\,\mathrm{J}}{20\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 50{,}97\,\mathrm{m}$

c) Formel umstellen: $m = \frac{E_{pot}}{g \cdot h} = \frac{20000\,\mathrm{J}}{50\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 40{,}77\,\mathrm{kg}$

2 Kinetische Energie

a) $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 800\,\mathrm{kg} \cdot (27{,}78\,\mathrm{m/s})^2 = 308691{,}4\,\mathrm{J}$

b) Formel umstellen: $v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200000\,\mathrm{J}}{900\,\mathrm{kg}}} = 21{,}08\,\mathrm{m/s} = 76\,\mathrm{km/h}$

c) $E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000\,\mathrm{kg} \cdot (10\,\mathrm{m/s})^2 = 50000\,\mathrm{J}$
$E_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000\,\mathrm{kg} \cdot (20\,\mathrm{m/s})^2 = 200000\,\mathrm{J}$
$\Delta E = E_2 - E_1 = 150000\,\mathrm{J}$. Um von 36 km/h auf 72 km/h zu kommen, wird also noch 3-mal so viel zusätzliche Energie benötigt, als wenn man aus dem Stand auf 36 km/h beschleunigt.

3 Energieerhaltung

a) $E_{kin} =$ konstant $\Rightarrow v =$ konstant. Durch die Reibung mit der Luft wird die potentielle Energie in Wärme umgewandelt. Der Fallschirmspringer und die ihn umgebende Luft wärmen sich beim Fall auf und der Fallschirmspringer wird nicht mehr schneller.

b) Beim Fall wird der Ziegelstein durch die Luftreibung gebremst und erwärmt sich. Diese Temperaturerhöhung soll berechnet werden. Es gilt: $\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T \Leftrightarrow \Delta T = \frac{\Delta Q}{m \cdot c}$, mit der spezifischen Wärmekapazität für Ziegelstein $c \approx 900\,\mathrm{J/kg{\cdot}K}$.
$E_{pot} = m \cdot g \cdot h = 2{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 26\,\mathrm{m} = 612{,}14\,\mathrm{J}$
$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4\,\mathrm{kg} \cdot (18\,\mathrm{m/s})^2 = 388{,}8\,\mathrm{J}$
$\Delta E = \Delta Q = 223{,}84\,\mathrm{J}$ Ca. 37 % der Lageenergie wird in Wärme umgewandelt.
$\Delta T = \frac{\Delta Q}{m \cdot c} = \frac{223{,}84\,\mathrm{J}}{2{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 900\,\mathrm{J/kg{\cdot}K}} \approx 0{,}1\,\mathrm{K}$

c) Auf dem Weg nach unten, wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Bei diesem Prozess entsteht auch Wärme durch Reibung des Schlittens mit dem Schnee und der umgebenden Luft. So wird nur ein geringer Teil der Lageenergie für die Bewegung genutzt.
$E_{pot} = m \cdot g \cdot h = 45\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 20\,\mathrm{m} = 8829\,\mathrm{J}$
$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 45\,\mathrm{kg} \cdot (2{,}78\,\mathrm{m/s})^2 = 173{,}61\,\mathrm{J}$
Wirkungsgrad: $\eta = \frac{E_{kin}}{E_{pot}} = \frac{173{,}61\,\mathrm{J}}{8829\,\mathrm{J}} = 2\,\%$

4 Impuls

a) $p = m \cdot v = 4\,\mathrm{kg} \cdot 20\,\mathrm{m/s} = 80\,\mathrm{Ns}$

b) Berechnung des Kugelvolumens: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (5\,\mathrm{cm})^3 = 523{,}6\,\mathrm{cm}^3$

Es gilt für die Dichte: $\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = V \cdot \rho = 523{,}6\,\mathrm{cm}^3 \cdot 11{,}35\,\mathrm{g/cm^3} = 5{,}943\,\mathrm{kg}$

Durch Umstellen der Formel ergibt sich für die Geschwindigkeit: $v = \frac{p}{m} = \frac{125\,\mathrm{Ns}}{5{,}943\,\mathrm{kg}} = 21\,\mathrm{m/s}$

c) $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{180\,\mathrm{Ns}}{225\,\mathrm{N}} = 0{,}8\,\mathrm{s}$

5 Unelastischer Stoß

a) Der Impuls der beiden Güterwagen vor dem Stoß und nach dem Stoß muss gleich groß sein: $p = p'$. In diesem speziellen Fall ruht einer der beiden Güterwagen vor dem Stoß. Nach dem Stoß sind sie gekoppelt (ein Kennzeichen des vollständig unelastischen Stoßes) und bewegen sich gemeinsam mit der Geschwindigkeit u weiter.

$m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \Leftrightarrow u = \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{35\,\mathrm{t} \cdot 1{,}39\,\mathrm{m/s}}{55\,\mathrm{t}} = 0{,}88\,\mathrm{m/s}$

Das Verhältnis der beiden kinetischen Energien nach dem Stoß und vor dem Stoß $\frac{E'_{kin}}{E_{kin}}$ gibt an welcher Anteil sich in Wärme und Verformungsenergie umgewandelt hat.

$\frac{E'_{kin}}{E_{kin}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot u^2}{\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2} = \frac{55}{35} \cdot \frac{0{,}88^2}{1{,}39^2} = 67\,\%$

b) Auch hier gilt der Impulserhaltungssatz. Diesmal bewegen sich beide Körper vor dem Stoß mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und nach dem Stoß mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit.

$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \Leftrightarrow u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$

Setzt man nun für $v_1 = 1{,}11\,\mathrm{m/s}$ und $v_2 = 3\,\mathrm{m/s}$ oder $v_2 = -3\,\mathrm{m/s}$ ein, so erhält man für $u = 2{,}17\,\mathrm{m/s}$ oder $u = -1{,}19\,\mathrm{m/s}$.

6 Elastischer Stoß

a) Beim α-Zerfall wandelt sich Radium in Radon um. Dabei stößt der Radiumkern einen Heliumkern mit hoher Geschwindigkeit aus.

Die Reaktionsgleichung lautet: ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\,\mathrm{He}$

Die Massezahlen A der beiden Stoßpartner sind also für Radon $A_{\mathrm{Rn}} = 222$ und für Helium $A_{\mathrm{He}} = 4$. Die Impulse der beiden Kerne müssen gleich sein: $p_{\mathrm{Rn}} = p_{\mathrm{He}}$.

$222 \cdot v_1 = 4 \cdot v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{4}{222} \cdot 1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s} \approx 270\,\mathrm{m/s}$

b) Aus dem t-s-Diagramm bestimmt man die Geschwindigkeiten der beiden Stoßpartner vor und nach dem Stoß mit $v = \frac{s}{t}$. Es ist: $v_1 = 1\,\mathrm{m/s}$; $v_2 = 0\,\mathrm{m/s}$; $u_1 = -0{,}35\,\mathrm{m/s}$; $u_2 = 0{,}67\,\mathrm{m/s}$.

Impulserhaltung: $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$. In diesem Fall also $m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$.

Nach Einsetzen der Werte erhält man: $0{,}1\,\mathrm{Ns} = -0{,}035\,\mathrm{Ns} + 0{,}13\,\mathrm{Ns}$. Linke und rechte Seite der Gleichung stimmen im Rahmen der Genauigkeit überein.

Energierhaltung: $E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2$. In diesem Fall also $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_1^2$.

Nach Einsetzen der Werte erhält man: $0{,}05\,\mathrm{J} = 0{,}006\,\mathrm{J} + 0{,}04\,\mathrm{J}$. Linke und rechte Seite der Gleichung stimmen im Rahmen der Genauigkeit überein.